On définit la suite: $U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$, $n \in \mathbb{N}$

2) Montrer que pour tout ,$n \in \mathbb{N}$: $U_n \geq 0$.

. Montrons que $\int_0^1 \frac{u^n}{\sqrt{1+u^2}}\,dx \geq 0$??

• $u \longmapsto \frac{u^n}{\sqrt{1+u^2}}$ est continue sur $[0,1]$

on a $0 \leq u \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq \boxed{u^n} \leq 1$

par suite

$0 \leq u \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq u^2 \leq 1$

$\Rightarrow 1 \leq 1+u^2 \leq 2$

$\Rightarrow 0 < 1 \leq \boxed{\sqrt{1+u^2}} \leq \sqrt{2}$

Donc • $\frac{u^n}{\sqrt{1+u^2}} \geq 0 \quad \forall x \in [0,1]$

Donc $\boxed{U_n = \int_0^1 \frac{u^n}{\sqrt{1+u^2}}\,dx \geq 0}$